Twists of genus three curves and their Jacobians

Meagher, Stephen

Publication date:
2008

Samenvatting

Stel C is een kromme van geslacht g over een eindig lichaam $\mathbf{F}_q$. Uit werk van Hasse en van Weil (met een kleine verbetering door Serre) weten we, dat het aantal $\mathbf{F}_q$ rationale punten op C een niet-negatief geheel getal is in het interval

$$[q+1-g[2\sqrt{q}], q+1+g[2\sqrt{q}]] \,.$$

Een voor de hand liggende vraag is, welke getallen in dit gegeven interval daadwerkelijk voorkomen als het aantal punten op een kromme van geslacht g over $\mathbf{F}_q$.

In dit proefschrift behandelen we twee vragen die voortkomen uit een poging, bovenstaand probleem voor geslacht 3 krommen te beantwoorden. Hier volgt een uitleg van deze vragen:

Uit werk van Lauter-Serre en van Auer-Top is bekend, dat een constante c bestaat, onafhankelijk van q, zodat voor elke q er een geslacht 3 kromme C over $\mathbf{F}_q$ is waarvoor ofwel

$$\#C(\mathbf{F}_q) > q+1+3[2\sqrt{q}]-c,$$

ofwel

$$\#C(\mathbf{F}_q) < q+1-3[2\sqrt{q}]+c.$$

De ambiguïteit hier heeft de volgende oorzaak: om bovenstaande bewering aan te tonen, construeren we eerst een constante c zodat voor elke q een indecomposabel hoofdgepolariseerd abels drievoud (A,a) over $\mathbf{F}_q$ bestaat met de eigenschap, dat het Frobenius morfisme π_A voldoet aan de ongelijkheid

$$-\mathrm{tr}(\pi_A) > 3[2\sqrt{q}]-c.$$

De stelling van Torelli levert ons een geslacht 3 kromme C over $\mathbf{F}_q$ waarvan de Jacobiaan $\mathrm{Jac}(C)$ ofwel isomorf is met (A,a), ofwel met een $[-1]$ twist van (A,a). Dit heeft tot gevolg dat het Frobenius morfisme π_J van $\mathrm{Jac}(C)$ voldoet aan

$$\pi_J = \pi_A \;\text{ of }\; \pi_J = -\pi_A.$$

Bovenstaande bewering van Auer-Top en Lauter-Serre volgt nu uit de spoorformule van Weil

$$\#C(\mathbf{F}_q) = q+1-\mathrm{tr}(\pi_J).$$

Serre opperde in een brief aan Top een manier om de gegeven ambiguïteit te behandelen- m.a.w. om te bepalen of $\mathrm{Jac}(C)$ isomorf is met (A,a) of met een $[-1]$ twist van (A,a). Hij stelde voor, dat met χ_{18} het product van de even algebraïsche theta nulls, opgevat als "algebraïsche modulaire vormen van halftallig gewicht", $\mathrm{Jac}(C)$ isomorf is met (A,a) over $\mathbf{F}_q(\sqrt{\chi_{18}(A,a)})$. Feitelijk opperde Serre, dat dit het geval zou moeten zijn over ieder lichaam van karakteristiek ongelijk aan 2. Deze suggestie wordt in hoofdstuk 1 van dit proefschrift bewezen. In wat meer hoogdravend taalgebruik kan het hoofdresultaat van dit hoofdstuk als volgt geformuleerd worden: de moduliruimte van krommen van geslacht 3 wordt verkregen uit de moduliruimte van indecomposabele hoofdgepolariseerde abelse drievouden door "de wortel uit χ_{18} toe te voegen".

De tweede vraag die in dit proefschrift wordt behandeld is de volgende. Zij C een geslacht 3 kromme over $\mathbf{F}_q$ met veel automorfismen. Dan is bekend dat er geslacht 3 krommen C' over $\mathbf{F}_q$ bestaan met de eigenschap dat C' en C niet isomorf zijn over $\mathbf{F}_q$ maar wel over een uitbreiding van $\mathbf{F}_q$. Een natuurlijke vraag is: kunnen we de mogelijke C' classificeren, en daarbij de getallen $\#C'(\mathbf{F}_q)$ in termen van deze classificatie? Hoofdstuk 2 geeft een antwoord op deze vraag. In het bijzonder worden in detail de speciale gevallen van de Klein en de Fermat krommen van graad 4 behandeld.